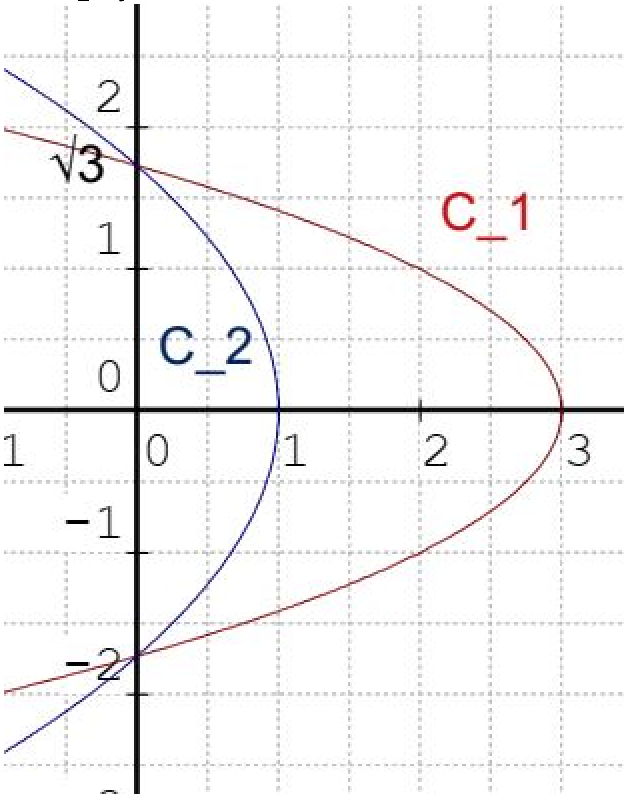
ENSA-ALHOCEIMA **ANALYSE 4**
CPII. **SEMESTRE 4**

Exercice 5

1) *Calculons l'aire du domaine D limité par les paraboles :*
C_1: $y^2 = 3 - x$ *et* C_2: $y^2 = 3 - 3x$ *et* $x \geq 0$.



D'après la figure ci-dessus, D est la partie délimitée entre les graphes C_1 *et* C_2*. Par raison de symétrie, il suffit de calculer la surface de la partie supérieure.*

En fixant x entre 0 et 1*, on remarque que y varie entre la valeur correspondante à* C_2 *et celle correspondante à* C_1*. Donc*

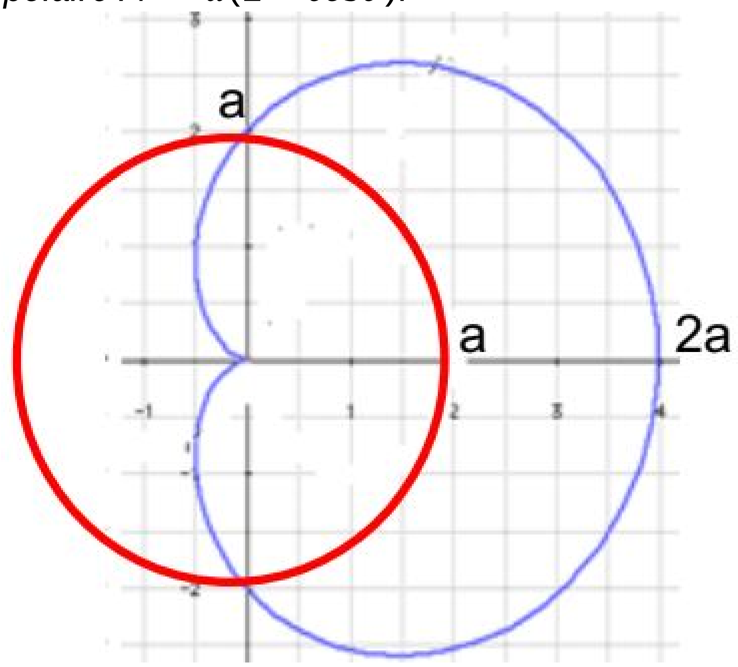
$$\sqrt{3-3\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{y} \leq \sqrt{3-\boldsymbol{x}}$$

Par contre, en fixant x entre 1 et 3*, on remarque que* $0 \leq \boldsymbol{y} \leq \sqrt{3-\boldsymbol{x}}$

Par suite,

$$\mu(D) = 2\left(\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{3-3x}}^{\sqrt{3-x}} dy\right) dx + \int_1^3 \left(\int_0^{\sqrt{3-x}} dy\right) dx\right)$$
$$= 2\left(\int_0^1 (\sqrt{3-x} - \sqrt{3-3x}) dx + \int_1^3 \sqrt{3-x}\, dx\right)$$
$$= 2\left(\int_0^3 \sqrt{3-x}\, dx - \int_0^1 \sqrt{3-3x}\, dx\right)$$
$$= 2\left(\left[-\frac{2}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 - \left[-\frac{2}{9}(3-3x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1\right)$$
$$= 2\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}^3 - \frac{2}{9}\sqrt{3}^3\right) = \frac{8}{9}\sqrt{3}^3$$

2) *Soit $a > 0$. Notons (E) le domaine extérieur au cercle (en rouge) d'équation polaire : $r = a$ et intérieur à la cardioïde (en bleu) d'équation polaire : $r = a(1 + cos\theta)$.*



D'après la figure, on a

$$E = \left\{M(r,\theta):\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad et \quad a \le r \le a(1 + cos\theta)\right\}$$

D'où, $\mu(E) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_a^{a(1+cos\theta)} r dr\right) d\theta$ *et par symétrie on trouve:*

$$\mu(E) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_a^{a(1+cos\theta)} rdr\right)d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_a^{a(1+cos\theta)} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}((1+cos\theta)^2-1)a^2d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^2(\theta)+2cos\theta)a^2d\theta$$

Or comme $cos^2(\theta) = \frac{1+cos(2\theta)}{2}$, *alors*

$$\mu(E) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+cos(2\theta)}{2}+2cos\theta\right)a^2d\theta = a^2\left[\frac{\theta}{2}+\frac{sin(2\theta)}{4}+2sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}+2\right)a^2$$

Exercice 6

1) ***En utilisant une intégration par parties,*** *On pose*

$$\begin{cases} u'(x) = g'(x) \\ v(x) = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u(x) = g(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

Par suite,

$$\int_0^a xg'(x)dx = [xg(x)]_0^a - \int_0^a g(x)dx = ag(a) - \int_0^a g(x)dx$$

2) *On a* ***d'après le théorème de Fubini:***

$$L = \iint_D xy\frac{\partial^4 f}{\partial^2x\partial^2y}(x,y)dx\,dy = \int_0^b\left(\int_0^a x\frac{\partial^4 f}{\partial^2x\partial^2y}(x,y)dx\right)ydy$$

En appliquant la question précédente pour $\boldsymbol{g_1(x) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial^2 y}(x,y)}$, *on trouve*

$$\int_0^a x\frac{\partial^4 f}{\partial^2x\partial^2y}(x,y)dx = a\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial^2y}(a,y) - \int_0^a \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial^2y}(x,y)dx$$

Par suite,

$$L = \int_0^b a\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial^2y}(a,y)ydy - \int_0^b\left(\int_0^a \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial^2y}(x,y)dx\right)ydy$$

Posons $L_1 = \int_0^b a\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial^2y}(a,y)ydy$ *et* $L_2 = \int_0^b\left(\int_0^a \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial^2y}(x,y)dx\right)ydy.$

Pour L_1 ***on applique la question 1, avec*** $\boldsymbol{g_2(y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,y)}$***:***

$$L_1 = a\left(bg_2(b) - \int_0^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,y)dy\right)$$

$$= ab\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) - a\int_0^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,y)dy$$

Par contre, pour L_2 on utilise d'abord le théorème de Fubini:

$$L_2 = \int_0^b \left(\left(\int_0^a \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}(x,y)dx\right)ydy = \int_0^a \left(\left(\int_0^b y\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}(x,y)dy\right)dx\right.\right.$$

Ensuite, on calcule $\int_0^b y\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}(x,y)dy$ *, en appliquant* ***la question 1, avec***

$\boldsymbol{g_3(y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)}$ *et on trouve*

$$\int_0^b y\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}(x,y)dy = bg_3(b) - \int_0^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dy$$

$$= b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,b) - \int_0^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dy$$

On en déduit donc que,

$$L_2 = \int_0^a \left(b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,b) - \int_0^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dy\right)dx$$

$$= b\int_0^a \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,b)dx - \int_0^a\int_0^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dy\,dx$$

Finalement, on aboutit à:

$$L = ab\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) - a\int_0^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,y)dy$$

$$-\left(b\int_0^a \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,b)dx - \int_0^a\int_0^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dy\,dx\right)$$

D'où,

$$L = ab\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) - a\int_0^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,y)dy - b\int_0^a \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,b)dx + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dy\,dx$$

Exercice 7

Calculons les intégrales triples suivantes :

1) On a $I = \iiint_D x^a y^b z^c dx\,dy\,dz$ *avec* $D = \{(x,y,z)\epsilon\mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\ et\ 0 \leq z \leq xy\}$ *et* $(a,b,c)\epsilon(\mathbb{R}_+^*)^3$.

Donc,

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{xy} z^c dz\right) y^b dy\right) x^a dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[\frac{z^{c+1}}{c+1}\right]_0^{xy} y^b dy\right) x^a dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{(xy)^{c+1}}{c+1} y^b dy\right) x^a dx$$

$$= \frac{1}{c+1}\int_0^1 \left(\int_0^1 y^{c+b+1} dy\right) x^{c+a+1} dx$$

Comme les bornes de y sont indépendantes de x, *alors*

$$I = \frac{1}{c+1}\left(\int_0^1 x^{c+a+1}dx\right) * \left(\int_0^1 y^{c+b+1}dy\right)$$

$$= \frac{1}{c+1}\left[\frac{x^{c+a+2}}{c+a+2}\right]_0^1 * \left[\frac{y^{c+b+2}}{c+b+2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{(c+1)(c+a+2)(c+b+2)}$$

2) On a ***D est un tétraèdre défini par :***

$D = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 1,\quad 0 \leq y \leq 1 - x\quad et\quad 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$

D'où,

$$J = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz \right) dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[\frac{-1}{2} * \frac{1}{(1+x+y+z)^2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 \frac{-1}{2} \left(\int_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2} \right) dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 \frac{-1}{2} \left(\left[\frac{y}{4} + \frac{1}{(1+x+y)} \right]_{y=0}^{y=1-x} \right) dx$$
$$= \frac{-1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} \right) dx$$
$$= \frac{-1}{2} \left[\frac{3}{4}x - \frac{x^2}{8} - ln(1+x) \right]_0^1 = \frac{-1}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - ln2 \right)$$
$$= \frac{ln2}{2} - \frac{5}{16}$$

3) Calculons le volume du domaine D en utilisant les coordonnées cylindriques :

Posons $\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \\ z = z \end{cases}$ *, comme* $x \geq 0$ et $y \geq 0$ *alors* $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

De plus, on a $x^2 + y^2 \leq 4$ *ce qui implique que* $0 \leq r \leq 2$.

Or , pour z on a $1 - x + y \leq z \leq 5$, *ce qui est équivalent à*

$$1 - rcos\theta + rsin\theta \leq z \leq 5$$

Par suite,

$$\mu(D) = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{1-rcos\theta+rsin\theta}^5 dz \right) d\theta \right) rdr$$
$$= \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 + rcos\theta - rsin\theta) d\theta \right) rdr$$
$$= \int_0^2 [4\theta + rsin\theta + rcos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} rdr = \int_0^2 (2\pi + r - r) rdr$$
$$= \int_0^2 2\pi rdr = [\pi r^2]_0^2 = 4\pi$$

<u>Exercice 8</u>

1) *Il est clair que D est un cylindre, donc on utilise les coordonnées cylindriques pour calculer I.*

On pose $\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \\ z = z \end{cases}$.

Par suite,

$$(x, y, z) \in D \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le r \le R\,, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \;\; et \;\; 0 \le z \le h$$

D'où,

$$I = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^h z^2 dz\right) d\theta\right) rdr = \left(\int_0^h z^2 dz\right) * \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) * \left(\int_0^R rdr\right)$$

$$= \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h * [\theta]_0^{2\pi} * \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \frac{\pi h^3 R^2}{3}$$

2) *En utilisant le changement suivant (composé d'un changement affine et un changement en coordonnées sphériques) :*

$$\begin{cases} x = arsin\theta cos\varphi = \psi_1(r, \theta, \varphi) \\ y = brsin\theta sin\varphi = \psi_2(r, \theta, \varphi) \\ z = crcos\theta = \psi_3(r, \theta, \varphi) \end{cases} \quad avec \quad \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

Dont le jacobien est :

$$j_\psi(r, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} asin\theta cos\varphi & bsin\theta sin\varphi & ccos\theta \\ arcos\theta cos\varphi & brcos\theta sin\varphi & -crsin\theta \\ -arsin\theta sin\varphi & brsin\theta cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = abcr^2 sin\theta$$

On trouve

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 * abcr^2 sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$= abc \left(\int_0^1 r^4 dr\right) * \left(\int_0^{\pi} sin\theta d\theta\right) * \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)$$

$$= abc \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 * [-cos\theta]_0^{\pi} * [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{5} abc$$

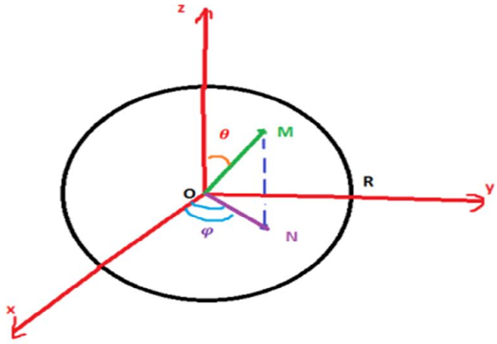
RAPPEL

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit $B(R)$ *la boule de centre O et de rayon R.*

Soit $M(x, y, z)$ *un point de la boule* $B(R)$ *et N sa projection orthogonale sur le plan* (Oxy).

Comment trouver les formules des coordonnées sphériques :



Notons $r = OM$, θ *l'angle* $\overline{(\vec{k}, \overrightarrow{OM})}$ *et* φ *l'angle* $\overline{(\vec{\imath}, \overrightarrow{ON})}$.
On a d'une part, $z = r\cos\theta$ *et* $ON = r\sin\theta$.
D'une autre part,

$$\begin{cases} x = ON\cos\varphi \\ y = ON\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \end{cases}$$

On en déduit donc les coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

En ce qui concerne les domaines de $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}$ ***et*** $\boldsymbol{\varphi}$ ***:***
C'est clair que $0 \le r \le R$.
En prenant $0 \le \theta \le \pi$, *on décrit un demi disque horizontale. Donc pour décrire la boule on fait tourner ce disque d'un angle de* 2π.
D'où, $0 \le \varphi \le 2\pi$.
Finalement,

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad avec \quad \begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

3) Pour K, on utilise le changement en coordonnées cylindriques suivant :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad avec \quad \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ 0 \le r \le z \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Par suite,

$$K = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^z |(r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2| r\, dr \right) d\theta \right) dz$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^z r^3\, dr \right) |(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2| d\theta \right) dz$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} |(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2| d\theta \right) * \int_0^1 \left(\int_0^z r^3\, dr \right) dz$$

Posons

$$K_1 = \left(\int_0^{2\pi} |(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2| d\theta\right) \quad et \quad K_2 = \int_0^1 \left(\int_0^z r^3\, dr\right) dz$$

Pour $\boldsymbol{K_1}$**,** *on a :* $(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 = \cos(2\theta)$.

Donc on doit étudier le signe de $\cos(2\theta)$*:*

Posons $\alpha = 2\theta$ *, on a donc*

$$\alpha \in [0,4\pi] \;\; et \quad \cos\alpha \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{2},4\pi\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$$

Par suite,

$$K_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta)d\theta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(2\theta)d\theta + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} \cos(2\theta)d\theta - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos(2\theta)d\theta$$

$$- \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \cos(2\theta)d\theta$$

$$= \left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + \left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} - \left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$- \left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) + \left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) - \left(\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)$$

$$- \left(\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right) = 4$$

D'une autre part,

$$K_2 = \int_0^1 \left(\int_0^z r^3\, dr\right) dz = \int_0^1 \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^z dz = \int_0^1 \frac{z^4}{4} dz = \left[\frac{z^5}{20}\right]_0^1 = \frac{1}{20}$$

Finalement,

$$K = \frac{1}{5}$$